# Лекція 7

**Тема:** Векторні простори

## *Короткий зміст лекції:*

Нехай $L$ – непорожня множина елементів будь-якої природи, $P$ – числове поле, елементи якого будемо називати скалярами.

На множині $L$ операція множення на скаляри з поля $P$ вважається заданою, якщо задано відображення $(L \times P) \to L$, тобто $\forall \vec{x} \in L, \alpha \in P$ поставлений у відповідність деякий елемент із $L$. Цей елемент називається *добутком* елемента $\vec{x}$ на скаляр $\alpha$ і позначається символом $\alpha\vec{x}$.

***Означення:*** Непорожня множина $L$ елементів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ називається *векторним*, або *лінійним* простором над числовим полем $P$, якщо в $L$ визначена алгебраїчна операція додавання і операція множення на скаляри (з поля $P$), причому виконуються наступні умови (аксіоми):

1. $L$ – абелева група відносно додавання.
2. Операція множення на скаляр асоціативна, тобто $\forall \alpha, \beta \in P \ \forall \vec{x} \in L \quad (\alpha\beta) \cdot \vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$.
3. $\forall \vec{x} \in L \ \ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
4. Операція множення на скаляр дистрибутивна відносно додавання елементів з $L$, тобто $\forall \alpha \in P \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$.
5. Операція множення на скаляр дистрибутивна відносно додавання скалярів, тобто $\forall \alpha, \beta \in P \ \forall \vec{x} \in L \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$.

Якщо $P = R$, то простір $L$ називається дійсним векторним (лінійним) простором; якщо $P = C$, то $L$ – комплексний векторний простір.

Елементи векторного простору $L$ називають *векторами*.

Наслідками із аксіом векторного простору є наступні твердження:

1. Сума будь-яких $n$ векторів простору $L$ не залежить від способу розташування дужок, за допомогою яких ці вектори розбиті на групи.
2. В $L$ існує єдиний нульовий вектор $\vec{0}$.
3. Для кожного $\vec{x} \in L$ існує єдиний протилежний вектор $-\vec{x}$ такий, що $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
4. В $L$ виконується дія віднімання, тобто $\forall \vec{a}, \vec{b} \in L$ рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ в $L$ має єдиний розв'язок $\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a})$, який називається різницею векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ і позначається $\vec{b} - \vec{a}$.
5. $\forall \alpha \in P \ \ \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
6. $\forall \vec{x} \in L \ \ 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
7. $\forall \alpha \in P \, \forall \vec{x} \in L \quad \alpha\vec{x} = \vec{0} \to \alpha = 0 \vee \vec{x} = 0$.
8. $\forall \alpha \in P \, \forall \vec{x} \in L \quad \alpha \cdot (-\vec{x}) = -\alpha \cdot \vec{x}$.
9. $\forall \alpha \in P \, \forall \vec{x} \in L \quad (\text{-}\alpha) \cdot \vec{x} = -\alpha \cdot \vec{x}$.
10. $\forall \alpha \in P \, \forall \vec{x}, \vec{y} \in L \quad \alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} - \alpha \cdot \vec{y}$.
11. $\forall \alpha, \beta \in P \, \forall \vec{x} \in L \quad (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} - \beta \cdot \vec{y}$.

Означення лінійної комбінації векторів арифметичного векторного простору $V_n$, лінійної залежності та незалежності системи векторів цього простору не спираються на поняття вектора як впорядкованого комплексу дійсних чисел, а базується лише на операціях над векторами. Тому ці поняття можна переносити і на абстрактний векторний простір.

***Означення:*** Вектор $\vec{b} \in L$ над полем *P* є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in L$, якщо в *P* існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, що

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \vec{a}_k .$$

Система векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m$ $(\mathrm{m} \geq 1)$ векторного простору *L* над полем *P* називається лінійно залежною, якщо в *P* існують скаляри $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, не всі рівні нулю, що має місце рівність

$$\mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + ... + \mu_m \vec{x}_m = \vec{0} .(*)$$

Система векторів називається лінійно незалежною, якщо рівність (*) має місце лише при $\mu_i = 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right)$.

Якщо система векторів лінійно залежна, то при $m > 1$ хоч би один з векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших її векторів.

Будь-яка система векторів, серед яких є нульовий вектор, лінійно залежна.

Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна.

***Означення:*** Максимальна кількість лінійно незалежних векторів векторного простору називається *розмірністю* векторного простору.

Розмірність простору *L* позначається символом $\dim L$ або $d(L)$.

З означення розмірності випливає, що простір *L* не може мати двох різних розмірностей.

Простори скінченої розмірності називаються скінченно-вимірними.

Простір, в якому можна знайти будь-яку кількість лінійно незалежних векторів, називається нескінченно вимірним.

Скінченно вимірні векторні простори називають ще і *n*-вимірними.

***Означення.*** Лінійно незалежна система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називається *базисом* векторного простору *L*, якщо кожний вектор з *L* є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Отже, базис – це *система* векторів, взятих в певному порядку. По різному нумеруючи вектори базису з однієї і тієї ж системи векторів можна одержати різні базиси. Тому для даного простору базис можна обрати не єдиним способом.

***Теорема 1.*** У просторі $L_n$ розмірності *n* кожна лінійно незалежна система з *n* векторів є базисом.

***Наслідок.*** У просторі $L_n$ розмірності *n* існує хоч би один базис, який складається з *n* векторів.

***Теорема 2.*** Якщо у векторному просторі $L_n$ існує базис, який складається з *n* векторів, то простір $L_n$ має розмірність *n*.

***Наслідок.*** Кожний базис *n*-вимірного простору $L_n$ складається з *n* векторів.

***<u>Теорема 3.</u>*** У *n*-вимірному векторному просторі $L_n$ будь-яку лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до базису цього простору.

***<u>Теорема 4.</u>*** Серед лінійних комбінацій *k* векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ не може бути більше ніж *k* лінійно незалежних.

***Контрольні питання для самоперевірки***

1. Дайте означення лінійного простору.
2. Сформулюйте та доведіть основні властивості операцій над векторами, що випливають з означення лінійного простору.
3. Дайте означення лінійної залежності і незалежності векторів.
4. Дайте означення базису лінійного простору.
5. Який простір називається скінченно-вимірним?
6. Що називається розмірністю простору?
7. Наведіть приклади скінченно вимірних і нескінченно вимірних лінійних просторів.
8. Доведіть, що будь-яка система з $n+1$ векторів *n*-вимірного лінійного простору лінійно залежна.
9. Доведіть, що будь-яка лінійно незалежна система векторів може бути доповнена до базису векторного простору.
10. Доведіть, що серед лінійних комбінацій *k* векторів не може бути більше ніж *k* лінійно незалежних.
11. Чи може лінійний простір складатися з: а) двох елементів; б) одного елементу; в) ста елементів?
12. Чи можуть в лінійному просторі існувати два нульових елементи?
13. Чи вірна рівність $\vec{0} = -\vec{0}$?
14. Чи можна стверджувати, що елементи $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ лінійного простору *L* лінійно незалежні, якщо даний елемент $\vec{x} \in L$ єдиним способом виражається у вигляді лінійної комбінації вказаних *n* елементів?
15. Нехай в лінійному просторі *L* задані *n* лінійно незалежних елементів $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$. Що ще треба вимагати, щоб вказана сукупність елементів була базисом в заданому просторі *L*?
16. Нехай в лінійному просторі *L* задані *n* лінійно незалежних елементів. Що ще треба вимагати, щоб розмірність цього лінійного простору була рівною *n*?

## Лекція 8

**Тема:** Координати вектора.

***Короткий зміст лекції:***

Крім загальних властивостей векторного простору, важливо вміти задавати вектори за допомогою скалярів з поля *P* і зводити операції над векторами до операцій над скалярами. Тому вводять поняття координат вектора.

Нехай $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ – будь-який базис простору $L_n$. Тоді будь-який вектор $\vec{a}\in L_n$ можна представити

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_n\vec{e}_n,$$

де $\alpha_i$ – число з поля *P*.

Таке зображення вектора $\vec{a}$ єдине.

Дійсно, якщо $\vec{a}=\alpha_1'\vec{e}_1+\alpha_2'\vec{e}_2+...+\alpha_n'\vec{e}_n$ – інше зображення вектора $\vec{a}$, то

$$\vec{0}=\vec{a}-\vec{a}=\left(\alpha_1-\alpha_1'\right)\cdot\vec{e}_1+\left(\alpha_2-\alpha_2'\right)\cdot\vec{e}_2+...+\left(\alpha_n-\alpha_n'\right)\cdot\vec{e}_n.$$

Оскільки $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – лінійно незалежні, то всі $\left(\alpha_i-\alpha_i'\right)=0$, звідси $\alpha_i=\alpha_i'$ , тобто ці два зображення співпадають.

Отже, якщо в просторі $L_n$ вибрано базис *B* з векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ і вектор $\vec{a}\in L_n$ є лінійною комбінацією векторів цього базису, то числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ називається координатами вектора $\vec{a}$ базисі *B*.

Рядок $[\alpha_1,\alpha_2,...,\ \alpha_n]$, утворений з координат вектора $\vec{a}$, взятих в певному порядку, називається *рядком координат*, або *координатним рядком вектора* $\vec{a}$.

Надалі будемо розглядати рядок $[\alpha_1,\alpha_2,...,\ \alpha_n]$ вектора $\vec{a}$ як матрицю над полем *P*.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають в базисі $B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>$ координатні рядки $[\alpha_1,\alpha_2,...,\ \alpha_n]$, $[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]$, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1)\cdot\vec{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\cdot\vec{e}_2+...+(\alpha_n+\beta_n)\cdot\vec{e}_2$$

$$\forall\lambda\in P,\forall\vec{a}\in L_n\quad\lambda\vec{a}=(\lambda\cdot\alpha_1)\cdot\vec{e}_1+(\lambda\cdot\alpha_2)\cdot\vec{e}_2+...+(\alpha_n+\beta_n)\cdot\vec{e}_n,$$

тобто $[\vec{a}+\vec{b}]=[\vec{a}]+[\vec{b}]$; $[\lambda\cdot\vec{a}]=\lambda[\vec{a}]$.

Звідси випливає, що координатним рядком лінійної комбінації

$$\lambda_1\cdot\vec{a}_1+\lambda_2\cdot\vec{a}_2+...+\lambda_s\vec{a}_s$$

векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_s$ є лінійна комбінація

$$\lambda_1[\vec{a}_1]+\lambda_2[\vec{a}_2]+...+\lambda_s[\vec{a}_s]$$

координатних рядків $[\vec{a}_1],[\vec{a}_2],...,[\vec{a}_s]$.

В *n*-вимірному векторному просторі $L_n$ кожний базис складається з *n* векторів.

Скільки ж різних базисів можна знайти в просторі $L_n$ і як пов’язані ці базиси між собою?

Нехай в просторі $L_n$ вибрані довільно базиси

$$B<\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n>\text{ і }B'=<\vec{e}_1',\vec{e}_2',...,\vec{e}_n'>.$$

Кожний вектор $\vec{e}_i'(i=\overline{1,n})$ як і будь-який вектор простору $L_n$ однозначно лінійно виражається через вектори базису *B*:

$$\vec{e}_i'=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot\vec{e}_j,\ i=\overline{1,n}.$$

Матриця

$$T=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

рядками, якої є координатні рядки векторів базису $B^{'}$ в базисі *B* називається матрицею переходу від базису *B* до базису $B^{'}$.

Рівність

$$\vec{e}_i^{\,'}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\cdot\vec{e}_j,\ i=\overline{1,n}$$

виражає зв'язок між базисами $B$ і $B^{'}$ і матрицею переходу *T*.

***Теорема 1.*** Матриця переходу від одного базису до іншого неособлива.

***Теорема 2.*** Будь-яка особлива матриця порядку *n* над полем *P* є матрицею переходу від одного базису *n*-вимірного векторного простору над полем *P* до деякого іншого базису.

### ***Контрольні питання для самоперевірки***

1. Дайте визначення координат вектора.
2. Дайте визначення матриці переходу від одного базису векторного простору $L_n$ до іншого базису цього простору.
3. Яка формула переходу від одного базису до іншого в лінійному просторі $L_n$?
4. Доведіть, що неособливі матриці і тільки вони є матрицями переходу.
5. Виведіть формули перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого.
6. Скільки базисів існує в кожному лінійному просторі?

12\. Довести, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між базисами (матриці переходу від одного базису до іншого): $\vec{e}_1=(1,1,1),\ \vec{e}_2=(1,-1,2),\ \vec{e}_3=(1,3,-1).$ $\vec{e}_1^{\,'}=(1,-1,1)\ \vec{e}_2^{\,'}=(1,2,-1),\ \vec{e}_3^{\,'}=(2,2,-1).$

13\. У базисі $B=<\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3>$ вектор $\vec{x}$ має координатний рядок $[2,-1,1]$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ у базисі $B'=<\vec{e}_1^{\,'},\vec{e}_2^{\,'},\vec{e}_3^{\,'}>$, якщо $\vec{e}_1=(-1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,0,1),\ \vec{e}_3=(0,-1,0).$
$\vec{e}_1^{\,'}=(1,0,1)\ \vec{e}_2^{\,'}=(0,-1,1),\ \vec{e}_3^{\,'}=(0,1,0).$

## Лекція 9

**Тема:** Підпростори векторного простору.

### ***Короткий зміст лекції:***

***Означення.*** Не порожня підмножина $L'$ векторного простору $L$ називається лінійним підпростором простору $L$, якщо вона є лінійним простором відносно операцій, введених в просторі $L$.

***Теорема 1.*** (критерій підпростору). Не порожня підмножина $L'$ простору $L$ тоді і тільки тоді є підпростором простору $L$, коли виконуються умови:

1. Якщо $\vec{x} \in L', \ \vec{y} \in L'$, то $\vec{x} + \vec{y} \in L'$
2. якщо $\vec{x} \in L', \ \lambda \in P$, то $\lambda\vec{x} \in L'$.

***<u>Теорема 2.</u>*** Розмірність будь-якого підпростору векторного простору не більше розмірності простору.

Розглянемо довільну систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ простору $L_n$.

Позначимо через $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m)$ є лінійним підпростором простору $L_n$.

Дійсно, якщо $\vec{a} \in L'$ і $\vec{b} \in L'$, то

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m;$$

$$\vec{b} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + ... + \beta_m\vec{a}_2, \text{де}\, \alpha_i, \beta_i \in P.$$

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \vec{a}_1 + ... + (\alpha_m + \beta_m) \cdot \vec{a}_m \in L'.$

$\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1) \cdot \vec{a}_1 + (\lambda\alpha_2) \cdot \vec{a}_2 + ... + (\lambda\alpha_m) \cdot \vec{a}_m \in L', \lambda \in P.$

Отже, $L'$ - підпростір простору $L$.

Підпростір $L'$ називають <u>*лінійною оболонкою векторів*</u> $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$, або підпростором, <u>*натягнутим на вектори*</u> $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$, або підпростором, <u>*породженим системою векторів*</u> $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$.

Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ лінійно незалежна, то вона є базисом підпростору $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m)$, і $L'$ має розмірність $m$.

Звідси випливає, що для кожного цілого числа $k$, $0 < k < n$, в $n$-вимірному просторі $L_n$ існує підпростір розмірності $k$. Таким підпростором є лінійна оболонка будь-яких $k$ лінійно незалежних векторів простору $L_n$.

З поняттям лінійного підпростору пов'язано поняття лінійного многовиду.

***<u>Означення.</u>*** Лінійним многовидом простору $L$ називається множина $Q$ векторів $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$, де $\vec{x}_0$ - деякий вектор із простору $L$, $\vec{y}$ - будь-який вектор із підпростору $L'$ векторного простору $L$.

Отже, многовид $Q$ утворюється зсувом підпростору $L'$ на вектор $\vec{x}_0$.

Многовид не є підпростором, але підпростори можна розглядати як окремі випадки многовидів (при $\vec{x}_0 = \vec{0}$).

Хоч многовид не є підпростором, але кожному многовиду приписують певну розмірність.

***<u>Означення.</u>*** Розмірністю многовиду $Q$ називають розмірність того підпростору $L'$, зсувом якого був одержаний цей многовид.

Над підпростором можна виконувати певні операції. Найважливішими з них є додавання і перетин підпросторів.

***<u>Означення.</u>*** Нехай $A, B, C, ...$ - скінченна або нескінченна множина деяких підпросторів простору $L$. Множина $F$ векторів, які належать одночасно кожному з підпросторів $A, B, C, ...$ простору $L$, називається перетином цих підпросторів і позначається

$$F = A \cap B \cap C \cap ...$$

***<u>Теорема 3.</u>*** Перетин $F$ будь-якої множини лінійних підпросторів $A, B, C, ...$ простору $L$ є лінійним підпростором цього простору.

***Означення.*** Нехай $U_1, U_2, ..., U_S$ - скінченна множина деяких підпросторів простору $L$. Множина $U$ усіх векторів, кожний з яких виражається у вигляді суми $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_s, \vec{u}_i \in U_i$, називається сумою підпросторів $U_1, U_2, ..., U_S$ і записується

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_S.$$

***Теорема 4.*** Сума скінченої кількості підпросторів $U_1, U_2, ..., U_S$ простору $L$ є лінійним підпростором цього простору.

***Теорема 5.*** Розмірність суми двох лінійних підпросторів простору $L$ дорівнює сумі розмінностей цих підпросторів мінус розмірність їх перетину.

***Означення.*** Сума $U = U_1 + U_2 + .. + U_S$ лінійних підпросторів $U_1, U_2, ..., U_S$ простору $L$ називається *прямою* сумою підпросторів, якщо для будь-якого вектора $\vec{u} \in U$ існує тільки зображення виду:

$$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + .. + \vec{U}_S,$$

де $\vec{u}_i \in U_i$, $i = \overline{1, S}$.

Пряма сума позначається

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_S.$$

***Теорема 6.*** Для того, щоб простір $L$ розкладається в пряму суму підпросторів $L_1$ і $L_2$ достатньо, щоб

1. підпростори $L_1$ і $L_2$ мали тільки один спільний вектор $\vec{x} = \vec{0}$ (нульовий вектор).
2. сума розмінностей цих підпросторів дорівнювала розмірності простору $L$.

### ***Контрольні питання для самоперевірки***

1. Що називається підпростором векторного простору?
2. Чи є підпростором векторного простору сам векторний простір?
3. Наведіть приклади підпросторів.
4. Що називається лінійною оболонкою векторів?
5. Що називається лінійним многовидом?
6. Покажіть, що розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь утворюють лінійний многовид.
7. Чи є лінійна оболонка елементів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k$ лінійного простору $L_n$ лінійним простором?
8. Доведіть, що розмірність будь-якого підпростору векторного простору не більше розмірності простору.
9. Довести, що перетин двох підпросторів векторного простору, є підпростором цього простору.
10. Довести, що сума двох підпросторів векторного простору є лінійним підпростором.
11. Нехай сума розмірностей двох лінійних підпросторів $L_1$ і $L_2$ $n$-вимірного векторного простору $L$ більша за число $n$. Довести, що тоді підпростори $L_1$ і $L_2$ мають спільний ненульовий вектор.

12. Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{a}_1(0,-1,0,-1)$, $\vec{a}_2(1,2,1,2)$, $\vec{a}_3(1,1,1,1)$, $\vec{a}_4(2,3,1,0)$, $\vec{a}_5(4,5,3,2)$.

13. Знайти розмірність $S$ суми і розмірність $\alpha$ перетину векторних підпросторів $L_1$ і $L_2$, заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a}_1(4,3,2,1)$, $\vec{a}_2(-1,0,-1,2)$, $\vec{a}_3(3,3,1,3)$, $\vec{a}_4(-2,0,-2,4)$.

14. Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів $L_1$ і $L_2$, заданих як лінійні оболонки векторів

$$\vec{a}_1=(1,2,1),\ \vec{a}_2=(1,1,-1),\ \vec{a}_3=(1,3,3);$$

$$\vec{b}_1=(2,3,-1),\ \vec{b}_2=(1,2,2),\ \vec{b}_3=(1,1,-3).$$

## Лекція 10

**Тема:** Векторні простори з скалярним добутком.

***Короткий зміст лекції:***

У векторному просторі введемо ще одну операцію – операцію скалярного множення векторів.

***Означення.*** У векторному просторі $L$ визначена операція скалярного множення, якщо кожній парі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}\in L$ поставлено у відповідність єдине число, яке називають *скалярним добутком* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначають символом $(\vec{a},\vec{b})$, причому виконуються наступні умови:

1. $\forall \vec{a},\vec{b}\in L \quad (\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
2. $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in L \quad (\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$;
3. $\forall \vec{a},\vec{b}\in L \ \ \forall \lambda\in P \quad (\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;
4. $\forall \vec{a}\in L \ \ \vec{a}\neq\vec{0} \quad (\vec{a},\vec{a})>0$.

Умови 1 – 4 називають *аксіомами скалярного добутку*.

Наслідки, що випливають з цього означення:

1. $(\alpha\vec{a},\beta\vec{b})=\alpha(\vec{a},\beta\vec{b})=\alpha(\beta\vec{b},\vec{a})=\alpha\beta(\vec{b},\vec{a})=\alpha\beta(\vec{a},\vec{b})$;
2. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{b}+\vec{c},\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})+(\vec{c},\vec{a})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;
3. $(\vec{0},\vec{0})=0;\ (\vec{0},\vec{b})=0$.

В будь-якому скінченно-вимірному векторному просторі скалярне множення можна ввести різними способами.

Нехай $L$ - векторний простір над полем $P$ з скалярним множенням.

***Означення.*** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}\in L$ називаються ортогональними або взаємно ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Запис $\vec{a}\perp\vec{b}$ означає, що $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ простору $L$ називається *ортогональною*, якщо взаємно ортогональні будь-які два вектори цієї системи.

Система з одного ненульового вектора вважається ортогональною.

Ортогональна система векторів, яка є базисом простору $L$, називається *ортогональним базисом простору*.

***Теорема 1.*** Будь-яка ортогональна система ненульових векторів простору $L$ лінійно незалежна.

***Наслідок:*** Будь-яка ортогональна система *n* ненульових векторів векторного простору є ортогональним базисом цього простору.

***Теорема 2.*** Якщо вектор $\vec{a}$ ортогональний до кожного з векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_k$, то він ортогональний і до будь-якої лінійної комбінації цих векторів $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{b}_i$.

***Теорема 3.*** Нехай $L$ - скінченновимірний векторний простір із скалярним множенням. Ортогональну систему ненульових векторів, яка не є базисом простору, можна доповнити до ортогонального базису простору.

Застосування процесу ортогоналізації до лінійно залежної системи ненульових векторів приведе до системи, яка містить ненульовий вектор.

***Наслідок:*** Будь-який скінченновимірний ненульовий векторний простір із скалярним множенням має ортогональний базис.

### *Контрольні питання для самоперевірки*

1. Що називається скалярним добутком елементів $\vec{x}, \vec{y}$ у векторному просторі?
2. Чи можна в лінійному просторі квадратних матриць другого порядку над полем *P* ввести скалярний добуток за формулою $(A, B) = a_1a_2 - b_2b_1 + c_1c_2 - d_1d_2$, де $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$?
3. Довести, що в просторі $P_2$ многочленів з дійсними коефіцієнтами степеня не вище 2, скалярний добуток можна ввести по формулі: $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.
4. Доведіть, що $\forall x \in L$ виконується рівність $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$.
5. Чи можна в лінійному просторі матриць другого порядку ввести скалярний добуток матриць $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ за формулою $(A, B) = a_1a_2 + d_1d_2$?
6. Доведіть, якщо ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ортогональні, то вони лінійно незалежні. Чи буде вірним обернене твердження?
7. Нехай $V$ - векторний простір із скалярним множенням. Доведіть, що якщо ненульовий вектор $\vec{b}$ ортогональний до векторів $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ простору $V$, то $\vec{b} \notin L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m)$.
8. Нехай $V$ - векторний простір із скалярним множенням. Нехай $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$ - лінійно незалежна система векторів простору $V$. Доведіть, що якщо ненульовий вектор $\vec{b}$ ортогональний до векторів $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$, то система $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m, \vec{b}$ - лінійно незалежна.
9. В чому полягає процес ортогоналізації векторів?

10. Перевірити, чи будуть вектори $\vec{a}_1 = (1,-2,2,-3)$ і $\vec{a}_2 = (2,-3,2,4)$ ортогональні, і якщо так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису, в якому вони розглядаються.

11. Ортогоналізувати систему векторів

$$\vec{a}_1 = (1,2,3,4),\ \vec{a}_2 = (0,5,0,5),\ \vec{a}_3 = (8,10,-8,14).$$

## Лекція 11

**Тема:** Евклідові векторні простори.

***Короткий зміст лекції:***

***Означення.*** Дійсний векторний простір, в якому визначено скалярне множення, називається *евклідовим простором.*

Евклідів простір будемо позначати символом $E$, а евклідів простір розмірності n – символом $E_n$.

***Теорема 1.*** Арифметичний векторний простір над полем $R$ із стандартним скалярним множенням є евклідовим.

***Означення:*** Нормою вектору евклідового простору називається арифметичний квадратний корінь із скалярного добутку квадрату вектору.

Норма вектору позначається $\|\vec{a}\|$.

Вектор $\vec{a}$ називається *нормованим*, якщо $\|\vec{a}\| = 1$.

***Теорема 2.*** Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ - вектори евклідового простору і $\lambda \in R$, то

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$, причому $\|\vec{a}\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$;
3. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ (нерівність Коши-Буняковського);
4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (нерівність трикутника).

***Означення.*** Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (відмінними від $\vec{0}$) евклідового простору $E$ називають таке число $\varphi(0 \leq \varphi \leq \pi)$, що

$$Cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

Для евклідових просторів одним із основних є поняття *ортонормованого* базису. Цей базис є аналогом прямокутної декартової системи координат у звичайному просторі.

***Означення.*** Система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ евклідового простору називається *ортонормованою*, якщо вона ортогональна і кожний її вектор нормований.

Ортонормована система векторів, яка є базисом простору, називається ортонормованим базисом простору.

***Теорема 3.*** У скінченновимірному векторному просторі існують ортонормовані базиси.

***Властивості ортонормованого базису.***

1. Якщо $E_n$ - n-вимірний ненульовий евклідів простір, то будь-яка ортонормована система n векторів є ортонормованим базисом простору $E_n$.

2. Ортонормовану систему векторів ненульового скінченновимірного евклідового простору, яка не є базисом, можна доповнити до ортонормованого базису простору.

3. Якщо $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ - ортонормований базис евклідового простору і $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+...+\alpha_n\vec{e}_n$, $\vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+...+\beta_n\vec{e}_n$ - вектори простору, то $(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\beta_1+...+\alpha_n\beta_n$ і $\|\vec{a}\|^2=\alpha_1^2+...+\alpha_n^2$.

4. Якщо $\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ - ортонормований базис евклідового простору і $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+...+\alpha_n\vec{e}_n$, то $\alpha_i=(\vec{a},\vec{e}_i)$ для $i=\overline{1,n}$, тобто координати вектора $\vec{a}$ є його проекціями на базисні вектори.

### *Контрольні питання для самоперевірки*

1. Який векторний простір називається евклідовим?
2. Дайте означення норми вектора та доведіть її властивості.
3. Який вектор називається нормованим?
4. Яка система векторів називається ортонормованою?
5. Дайте означення ортонормованого базису.
6. Як за допомогою будь-якого базису евклідового простору побудувати ортонормований базис?
7. Скільки ортонормованих базисів можна знайти в евклідовому просторі?
8. Як в ортонормованому базису запишеться скалярний добуток елементів $\vec{x},\vec{y}$?
9. Чи можна за видом скалярного добутку елементів $\vec{x},\vec{y}$ евклідового простору зробити висновок про те, в якому базисі (ортонормованому або в довільному) записано скалярний добуток? Які теореми у зв'язку з цим вам відомі?
10. Доведіть теорему Піфагора в евклідовому просторі: якщо $(\vec{x},\vec{y})=0$, то $|\vec{x}-\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$. Сформулюйте і доведіть обернену теорему.
11. Нехай $\vec{x}_1,...,\vec{x}_S$ - лінійно залежна система векторів евклідового простору. Доведіть, що в процесі ортогоналізації цієї системи на деякому кроці одержиться нульовий вектор.
12. В деякому ортонормованому базисі евклідовогоо простору задана система векторів:

$$\vec{x}_1=(1,0,1,\text{-}1,2),\ \vec{x}_2=(1,0,1,\text{-}1,\text{-}2),\ \vec{x}_3=(1,0,3,0,0),\ \vec{x}_4=(0,0,2,1,6).$$

Нехай $L=L(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4)$ - лінійна оболонка.

Знайти

а) розмірність і базис $L$;

б) в лінійній оболонці побудувати ортогональний базис;

в) Добудувати ортогональний базис лінійної оболонки $L$ до ортогонального базису в евклідовому просторі $E_S$;

г) Указати в лінійній оболонці $L$ ортогональний базис і добудувати його до ортогонального базису евклідового простору $E_S$

## Лекція 12

**Тема:** Ортогональне доповнення підпростору.

***Короткий зміст лекції:***

Нехай $U$ - деякий підпростір евклідового простору $E_n$.

***<u>Означення.</u>*** Вектор $\vec{a} \in E_n$ називають ортогональним підпростору $U(\vec{a} \perp U)$, якщо він ортогональний до будь-якого вектора цього підпростору.

***<u>Теорема 1.</u>*** Для того, щоб вектор $\vec{a}$ був ортогональним підпростору $U$, достатньо, щоб він був ортогональним кожному вектору деякого базису цього підпростору.

***<u>Означення.</u>*** Підпростори $U$ і $V$ простору $E$ називають ортогональними $(U \perp V)$, якщо кожний вектор $\vec{u} \in U$ ортогональний кожному вектору $\vec{v} \in V$.

***<u>Теорема 2.</u>*** Для того щоб підпростори $U$ і $V$ простору $E$ були ортогональними, достатньо, щоб кожний вектор деякого базису підпростору $U$ був ортогональний кожному вектору деякого базису підпростору $V$.

Перетин ортогональних підпросторів $U$ і $V$ є нульовий підпростір $\{0\}$.

Дійсно, якщо $\vec{a} \in U \cap V$, то $\vec{a} \in U$ і $\vec{a} \in V$, але тоді $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ і, отже, $\vec{a} = \vec{0}$.

Позначимо символом $U^{\perp}$ сукупність всіх векторів простору $E$, ортогональних підпростору $U$; $U^{\perp}$ є підпростір простору $E$. Дійсно, $\forall \lambda \in R \ \ \forall \vec{a}, \vec{b} \perp U$ маємо: $\vec{a} \perp U \wedge \vec{b} \perp U \to (\vec{a} + \vec{b}) \perp U \wedge \lambda\vec{a} \perp U$.

***<u>Означення.</u>*** Підпростір $U^{\perp}$ всіх векторів простору $E$, ортогональних підпростору $U$, називається ортогональним доповненням підпростору $U$.

***<u>Теорема 3.</u>*** Евклідів простір $E_n$ є пряма сума будь-якого свого підпростору $U$ та його ортогонального доповнення $U^{\perp}$:

$$E_n = U \oplus U^{\perp}.$$

З доведеної теореми випливає, що

$$\dim E_n = \dim U + \dim U^{\perp}.$$

Якщо $E_n = U \oplus U^{\perp}$, то будь-який вектор $\vec{x} \in E_n$ однозначно зображується у вигляді

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \text{ де } \vec{y} \in U;\ \vec{z} \in U^{\perp}.$$

Використовується при цьому наступна термінологія:

$\vec{x}$ - похила до простору $U$,

$\vec{y}$ - проекція вектора $\vec{x}$ на $U$,

$\vec{z}$ - перпендикуляр, опущений з вектора $\vec{x}$ на підпростір $U$, а довжина $|\vec{z}|$ вектора $\vec{z}$ - відстань вектора $\vec{x}$ до $U$,

кут $\varphi$ між векторами $\vec{x}$ і підпростором $U$ - це кут між вектором $\vec{x}$ та його проекцією на підпростір $U$, тобто

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

Нехай $E$ і $E'$ - евклідові простори.

***<u>Означення.</u>*** Евклідові простори $E$ і $E'$ називаються *<u>ізоморфними</u>*, якщо між їх векторами можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що якщо вектору $\vec{a} \in E$ ставиться у відповідність вектор $\vec{a}' \in E'$, а вектору $\vec{b} \in E$ - $\vec{b}' \in E'$, то

1. сумі векторів $\vec{a} + \vec{b}$ ставиться у відповідність $\vec{a}' + \vec{b}'$;
2. добутку $\lambda\vec{a}$, де $\lambda \in R$ - вектор $\lambda\vec{a}'$;
3. скалярні добутки відповідних пар векторів рівні між собою: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}', \vec{b}')$.

Інакше, простори $E$ і $E'$ називаються ізоморфними, якщо між ними як векторними просторами існує ізоморфна відповідність, яка зберігає скалярний добуток відповідних пар векторів.

***<u>Теорема 4.</u>*** Будь-які два скінченновимірні евклідові простори однакової розмірності ізоморфні.

З теореми випливає, що всі *n*-вимірні евклідові простори ізоморфні арифметичному *n*-вимірному векторному простору.

### *Контрольні питання для самоперевірки*

1. Що називається ортогональним доповненням $M^{\perp}$ до підпростору $M$ евклідового простору $E$?
2. Чи є $M^{\perp}$ підпростором евклідового простору $E$?
3. Як пов'язані між собою розмірності $M$ і $M^{\perp}$?
4. Як пов'язані між собою базиси $M$, $M^{\perp}$ і $E_n$?
5. Що означає запис $E_n = M \oplus M^{\perp}$?
6. Чи справедливе твердження: для будь-якого підпростору $M$ евклідового простору $E_n$ $M \oplus M^{\perp} = E_n$?
7. Доведіть, що ортогональне доповнення $(U+V)^{\perp}$ суми $U+V$ підпросторів $U$ і $V$ евклідового простору збігається з перетином $U^{\perp} \cap V^{\perp}$ ортогональних доповнень $U^{\perp}$ і $V^{\perp}$ підпросторів $U$ і $V$.
8. Знайдіть базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору $U$, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, 2, 3)$, $\vec{x}_3 = (0, 1, -2, 1)$.
9. Знайдіть ортогональну проекцію $\vec{y}$ і ортогональну складову $\vec{z}$ вектора $\vec{x} = (8, 5, -3, 6)$ на лінійний простір $U$, що є лінійною оболонкою векторів $\vec{u}_1 = (1, -1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -4, 2, 1)$.
10. Знайти відстань від точки, заданої вектором $\vec{x}$ до лінійного многовиду $P$, якщо $\vec{x} = (2, 4, -4, 2)$, $P$ задано системою лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$